


LQES	VIVÊNCIA LQES
 <p>Métodos, Processos e Técnicas</p>	<p style="text-align: center;">Determinação da Densidade de Sólidos pelo Método de Arquimedes</p> <p style="text-align: center;"><i>Italo Odone Mazali</i></p>

1. Apresentação

“Um problema preocupava Hierão, tirano de Siracusa, no século III a.C.: havia encomendado uma coroa de ouro, para homenagear uma divindade, mas suspeitava que o ourives o enganara, não utilizando ouro maciço em sua confecção. Como descobrir, sem danificar o objeto, se seu interior continha uma parte feita de prata? Só um homem talvez conseguisse resolver a questão: seu amigo Arquimedes, famoso matemático e inventor de vários engenhos mecânicos. Hierão mandou chamá-lo e pediu-lhe uma resposta que pusesse fim à sua dúvida. Arquimedes aceitou a incumbência e pôs-se a procurar a solução para o problema. Esta lhe ocorreu durante o banho. Observou que a quantidade de água que se elevava na banheira, ao submergir, era equivalente ao volume de seu próprio corpo. Ali estava a chave para resolver a questão proposta pelo tirano. No entusiasmo da descoberta, Arquimedes saiu nu pelas ruas, gritando: Eureka! Eureka! (“Achei! Achei!”).” ⁽¹⁾



Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.)

2. Conceito de Densidade

A densidade absoluta é definida como a quantidade de massa em uma unidade de volume:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

A densidade de sólidos e líquidos, segundo o Sistema Internacional de Unidades é expressa em quilograma por metro cúbico - kg/m³ (vide material "Sistema SI: Unidades, Símbolos e Prefixos" ⁽²⁾). Entretanto, é mais comumente expressa em unidades de gramas por centímetro cúbico (g/cm³) ou gramas por mililitro (g/mL). A densidade absoluta é uma propriedade específica, isto é, cada substância pura tem uma densidade própria, que a identifica e a diferencia das outras substâncias. A densidade relativa de um material é a relação entre a sua densidade absoluta e a densidade absoluta de uma substância estabelecida como padrão. No cálculo da densidade relativa de sólidos e líquidos, o padrão usualmente escolhido é a densidade absoluta da água, que é igual a 1,000 g cm⁻³ a 4,0 °C.

A densidade de um sólido é função da temperatura e, principalmente, da natureza da sua estrutura cristalina, haja vista, que os diferentes polimorfos de um composto exibem diferentes densidades.

3. Método de Arquimedes

O Princípio de Arquimedes pode ser enunciado da seguinte maneira: "Um fluido em equilíbrio age sobre um monólito nele imerso (parcial ou totalmente) com uma força vertical orientada de baixo para cima, denominada empuxo, aplicada no centro de gravidade do volume de fluido deslocado, cuja intensidade é igual a do peso do volume de fluido deslocado" ⁽³⁾.

A densidade de um monólito (corpo sólido) pode ser definida como a relação entre a massa do monólito e a massa de um volume igual de um líquido. A densidade relativa é característica para cada monólito, e depende basicamente de dois fatores: dos elementos químicos que constituem o monólito (composição química) e a maneira como estes elementos estão arrançados dentro da estrutura cristalina (vide material "Reticulos Cristalinos e Grupos Espaciais Cristalográficos" ⁽⁴⁾).

Considerando, que no interior de um líquido em equilíbrio, certa porção cujo peso seja \vec{P}_L , as forças hidrostáticas com que o restante do líquido age sobre a porção considerada devem equilibrar o peso da porção líquida. A resultante de todas essas forças hidrostáticas é denominada empuxo e representada por \vec{E} . Assim, temos:

$$\vec{E} = \vec{P}_L \quad (1)$$

Se mergulharmos no líquido um monólito de forma e volume idênticos aos da porção líquida considerada, não se alteram as condições de equilíbrio para o líquido. Então, as forças hidrostáticas, cuja resultante é o empuxo (\vec{E}), continuarão a equilibrar o peso do líquido (\vec{P}_L) que agora foi desalojado pelo monólito. Na situação presente, porém, o empuxo (\vec{E}) estará agindo sobre o monólito, equilibrando o peso do monólito (P_C).

Desenvolvendo a igualdade (1), segundo a qual o empuxo tem intensidade igual à do peso do líquido deslocado pelo monólito, obtemos:

$$E = P_L = m_L \cdot g \quad (2)$$

onde g é a aceleração da gravidade ($m \cdot s^{-2}$) e m_L é a massa do líquido. Sendo:

$$m_L = d_L \cdot V_L \quad (3)$$

onde d_L é a densidade do líquido ($g \cdot cm^{-3}$) e V_L é o volume do líquido deslocado (cm^3).

Substituindo m_L , da equação (2), pela equação (3), temos:

$$E = d_L \cdot V_L \cdot g \quad (4)$$

a qual constitui a fórmula do empuxo. O peso do monólito é dado por:

$$P_C = d_C \cdot V_C \cdot g \quad (5)$$

onde V_C e d_C são, respectivamente, o volume e a densidade do monólito. Admitindo que o monólito sólido esteja totalmente imerso no líquido e, sendo o monólito mais denso, o volume do líquido deslocado V_L é igual ao volume do monólito V_C :

$$V_C = V_L = V \quad (6)$$

Assim, nas equações (4) e (5) podemos substituir V_L e V_C , respectivamente, por V e combinando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned}
 E &= d_L \cdot V \cdot g \Rightarrow \frac{E}{d_L} = V \cdot g \\
 P_C &= d_C \cdot V \cdot g \Rightarrow \frac{P_C}{d_C} = V \cdot g \\
 E \cdot d_C &= P_C \cdot d_L \tag{7}
 \end{aligned}$$

Como $d_L < d_C$, resulta que $P_C > E$. Em consequência, o monólito fica sujeito a uma resultante vertical com sentido de cima para baixo, denominada "peso aparente" (P_{AP}), cuja intensidade é dada por:

$$P_{AP} = P_C - E \tag{8}$$

Substituindo E na equação (7) pela equação (8):

$$\begin{aligned}
 (P_C - P_{AP}) \cdot d_C &= P_C \cdot d_L \\
 d_C &= \left(\frac{P_C}{P_C - P_{AP}} \right) \cdot d_L \tag{9}
 \end{aligned}$$

sendo:

$$P_C = m_C \cdot g \tag{10}$$

$$P_{AP} = m_{AP} \cdot g \tag{11}$$

onde m_C e m_{AP} são, respectivamente, a massa do monólito e a massa aparente do monólito (isto é, a massa do monólito quando imerso em água). Substituindo as equações (10) e (11) na equação (9), temos:

$$d_C = \left(\frac{m_C \cdot g}{m_C \cdot g - m_{AP} \cdot g} \right) \cdot d_L \Rightarrow d_C = \left[\frac{m_C \cdot g}{(m_C - m_{AP}) \cdot g} \right] \cdot d_L$$

$$\boxed{d_C = \left(\frac{m_C}{m_C - m_{AP}} \right) \cdot d_L} \tag{12}$$

A equação (12) é utilizada para determinação da densidade de monólitos não porosos (isto é, sólidos densos). Entretanto, alguns monólitos caracterizam-se por apresentar porosidade e, dessa maneira, ao medirmos o peso aparente do monólito poroso temos que considerar o volume

de líquido deslocado para preencher os poros (V_L). Assim, o peso aparente de um monólito poroso (P_{AP}^P) será dado por:

$$P_{AP}^P = P_U - d_L \cdot V_L^P \quad (13)$$

onde P_U é o peso do monólito poroso com os poros preenchidos pelo líquido e V_L^P é o volume de líquido utilizado para preencher os poros, o qual pode ser calculado por:

$$V_L^P = \frac{(P_U - P_{AP}^P)}{d_L} \quad (14)$$

Portanto, para monólitos porosos, determinamos sua densidade aparente (d_{AP}^P) por:

$$d_{AP}^P = \frac{P_C^P}{V_L^P} \quad (15)$$

onde P_C^P é o peso do monólito poroso. Substituindo V_L^P da equação (15) pela equação (14), chegamos a uma equação para determinar a densidade de um monólito poroso (d_C^P):

$$d_C^P = \frac{P_C^P}{\left(\frac{P_U - P_{AP}^P}{d_L}\right)} \Rightarrow d_C^P = \left(\frac{P_C^P}{P_U - P_{AP}^P}\right) \cdot d_L \Rightarrow d_C^P = \left(\frac{m_C^P \cdot g}{m_U \cdot g - P_{AP}^P \cdot g}\right) \cdot d_L$$

$$\boxed{d_C^P = \left(\frac{m_C^P}{m_U - P_{AP}^P}\right) \cdot d_L} \quad (16)$$

onde m_C^P é a massa do monólito poroso seco; m_U é a massa do monólito poroso com os poros preenchidos com o líquido; m_{AP}^P é a massa aparente do monólito poroso (com os poros preenchidos pelo líquido) imerso no líquido.

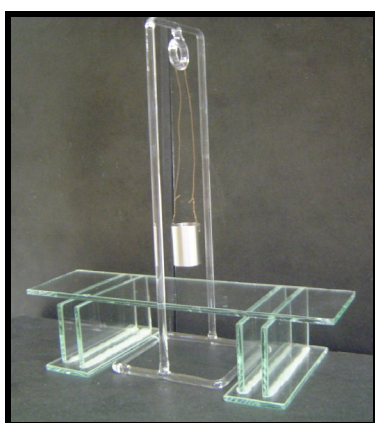
A determinação da densidade pelo Método de Arquimedes envolve unicamente medidas de massa. Em virtude disso, a densidade pode ser determinada com grande precisão e exatidão, empregando-se uma balança analítica.

Em princípio qualquer líquido pode ser empregado para determinação da densidade, porém, a água é o mais amplamente empregado. A água a ser utilizada nas medidas de densidade deve ser destilada e recém-fervida. Como a densidade da água varia em função da temperatura, o valor da $d_L^{H_2O}$ a ser utilizado no cálculo da densidade deve considerar essas variações. A Tabela 1 fornece os valores da densidade da água em função da temperatura.

Tabela 1 - Densidade da água em função da temperatura.

°C	Décimos de grau									
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
10	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984
20	0,9982	0,9980	0,9978	0,9976	0,9973	0,9971	0,9968	0,9965	0,9963	0,9960
30	0,9957	0,9954	0,9951	0,9947	0,9944	0,9941	0,9937	0,9934	0,9930	0,9926
40	0,9922	0,9919	0,9915	0,9911	0,9907	0,9902	0,9898	0,9894	0,9890	0,9885
50	0,9881	0,9876	0,9872	0,9867	0,9862	0,9857	0,9852	0,9848	0,9842	0,9838
60	0,9832	0,9827	0,9822	0,9817	0,9811	0,9806	0,9800	0,9765	0,9789	0,9784
70	0,9778	0,9772	0,9767	0,9761	0,9755	0,9749	0,9743	0,9737	0,9731	0,9724
80	0,9718	0,9712	0,9706	0,9699	0,9693	0,9686	0,9680	0,9673	0,9667	0,9660
90	0,9653	0,9647	0,9640	0,9633	0,9626	0,9619	0,9612	0,9605	0,9598	0,9591

4. Fotos Ilustrativas de um Aparato para a Determinação da Densidade pelo Método de Arquimedes.



(A)



(B)



(C)

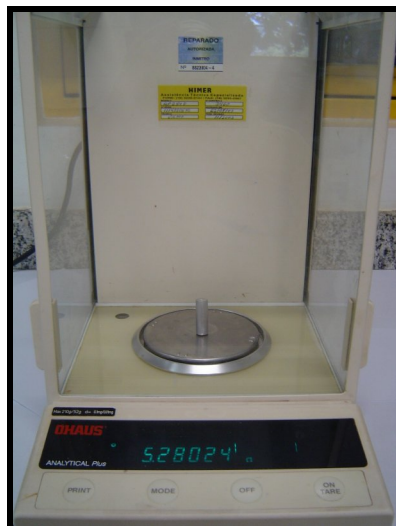
(A) e (B) Fotos ilustrativas de um aparato para a determinação da densidade pelo Método de Arquimedes empregando uma balança analítica e (C) Foto do sistema montado em uma balança analítica.

Somente a haste na qual está pendurado o copo porta-amostra deve ficar sobre o prato da balança. Ao fazer a montagem a haste não pode tocar o béquer nem a placa na qual o béquer está suportado.

5. Procedimento Experimental para a Determinação da Densidade de Arquimedes.

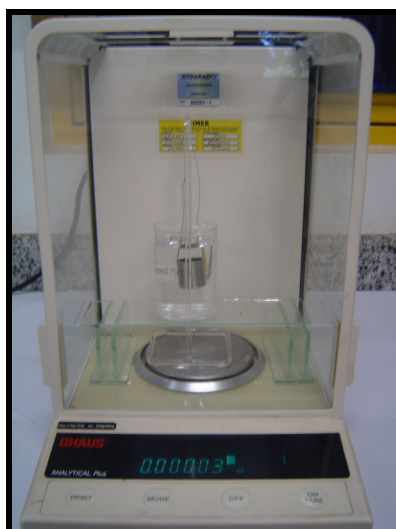
O procedimento para a determinação da densidade de um monólito denso envolve as seguintes etapas:

(1) Determinação da massa do monólito (m_c).



(2) Montagem do aparato para determinação da massa aparente (m_{AP}).

A balança deve ser zerada (tarada) com o copo porta-amostra vazio e imerso no líquido. O copo porta-amostra deve estar completamente imerso no líquido, não podendo tocar no béquer durante todo o procedimento. Para facilitar o preenchimento do copo porta-amostra pelo líquido e evitar a formação de bolhas de ar, recomenda-se que o fundo do copo seja furado.



(3) Determinação da massa aparente (m_{AP}).



(4) Determinação da temperatura (T) da água (ou outro líquido empregado).

(5) Cálculo da densidade (T = 25 °C):

$$d_c = \left(\frac{m_c}{m_c - m_{AP}} \right) \cdot d_L^{H_2O}$$

$$d_c = \left(\frac{5,28024}{5,28024 - 3,35293} \right) \cdot 0,9971$$

$$d_c = 2,7317 \text{ g cm}^{-3}$$

O procedimento para a determinação da densidade de um monólito poroso envolve as seguintes etapas:

(1) Determinação da massa do monólito poroso (m_c^p).

(2) Imersão do monólito poroso em água (ou outro líquido) para promover o total preenchimento dos poros.

(3) Determinação da massa do monólito poroso com os poros preenchidos com a água (m_U).

(4) Determinação da massa aparente empregando o monólito poroso com os poros preenchidos com a água (m_{AP}^p).

(4) Determinação da temperatura da água (ou outro líquido empregado).

(5) Cálculo da densidade.

6. Com os elementos apresentados, podemos voltar a questão inicial colocada à Arquimedes: “Como descobrir, sem danificar a coroa do Rei Heirão, se seu interior contém uma parte feita de prata?”



Fonte: ref. [5]. Foto ilustrativa. Não há nenhuma referência com a coroa do rei Heirão.

Primeiramente, precisaríamos determinar as densidades do ouro (Au) e da prata (Ag) puros para atuarem como padrões de referência. Utilizando-se amostras de Au e Ag puros, mede-se a massa (real) e a massa aparente de cada uma das amostras. (OBS: Atualmente, tais valores podem ser consultados no *Merck Index*⁽⁶⁾).

Padrão de Ouro:

à massa do monólito de Au: 2,4750 g

à massa aparente do monólito de Au: 2,3470 g

à temperatura da água: 25 °C.

$$\text{à Cálculo da densidade do Au: } d_C^{Au} = \left(\frac{2,4750}{2,4750 - 2,3470} \right) \cdot 0,9971$$

$$d_C^{Au} = 19,28 \text{ g cm}^{-3}$$

Padrão de Prata:

à massa do monólito de Ag: 1,9330 g

à massa aparente do monólito de Ag: 1,7490 g

à temperatura da água: 25 °C.

$$\text{à Cálculo da densidade do Ag: } d_C^{Ag} = \left(\frac{1,9330}{1,9330 - 1,7490} \right) \cdot 0,9971$$

$$d_C^{Ag} = 10,47 \text{ g cm}^{-3}$$

Considerando que a impureza presente no ouro é a prata, a densidade de uma liga Au-Ag (solução sólida de Ag em Au), aqui representada pela coroa, é dada por:

$$\begin{cases} d_C^{coroa} = x \cdot d_C^{Au} + y \cdot d_C^{Ag} \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (17)$$

onde x é a fração de Au e y é a fração de Ag na coroa (ou na liga Au-Ag). Para resolver esse conjunto de equações, primeiramente é necessário se determinar a densidade da coroa.

Caracterização da Coroa:

à massa da coroa: 1474,3 g

à massa aparente da coroa: 1390,4 g

à temperatura da água: 25 °C.

à Cálculo da densidade da coroa: $d_C^{coroa} = \left(\frac{1474,3}{1474,3 - 1390,4} \right) \cdot 0,9971$

$$d_C^{coroa} = 17,52 \text{ g cm}^{-3}$$

portanto, o valor da $d_C^{coroa} = 17,52 \text{ g cm}^{-3}$ confirma que a coroa não é 100% de Au. Para determinarmos a porcentagem de cada componente, nas condições hipotéticas apresentadas, devemos resolver o conjunto de equações (17):

$$\begin{cases} 19,28x + 10,47y = 17,52 \\ x + y = 1 \rightarrow x = y - 1 \end{cases}$$

$$19,28(1 - y) + 10,47y = 17,52$$

$$8,81y = 1,76$$

$$y = 0,20$$

$$x + y = 1 \rightarrow x = 0,8$$

Portanto, a coroa do rei Heirão (na condição hipotética apresentada neste exemplo) seria constituída por 80% de Au e 20% de Ag.

BIBLIOGRAFIA

- [1] <http://paginas.terra.com.br/educacao/fisicavirtual/grandes/arquimedes.htm>
- [2] http://lqes.iqm.unicamp.br/images/vivencia_lqes_index_sistema_si.pdf
- [3] http://lqes.iqm.unicamp.br/images/vivencia_lqes_index_reticulos_cristalinos.pdf
- [4] Soares, P.A.T., Ferraro, N.G., Santos, J.I.C. Aulas de Física. 5^a ed., São Paulo : Atual Editora, v.3, 1993, p.16-19.
- [5] <http://www.sarasa.com.br/artesacra/o24.jpg>
- [6] The Merck Index – An Encyclopedia of Chemicals, Drugs and Biologicals, 15th Ed., S. Budavari (Ed.). Published by Merck Research Laboratories, New Jersey : United States, 1996.